Ray-Tracing in einem 3-D Wind-Vektor-Feld zur Vorhersage von Schießlärm

Jürgen Zangers[1], Karl-Wilhelm Hirsch [1]

[1] *Institut für Lärmschutz, Düsseldorf, E-Mail: mail@ifl-acoustics.de*

Einleitung

Auf der DAGA 2004 wurden die physikalischen und numerischen Grundlagen eines dreidimensionalen Schallausbreitungsmodells für Schießlärm vorgestellt ([3]), das auf dem Konzept des „Wellenfront Ray-Tracings“ von Pierce [1] basiert und Vorhersagen über große Entfernungen in Abhängigkeit vom Wetter gestattet.

Für dieses Modell relevante Wettergrößen sind: Windgeschwindigkeitskomponenten in x- y- und z-Richtung, Temperatur und (relative) Feuchtigkeit. Diese Größen sind ortsabhängig, also Funktionen $f(x,y,z)$.

Zur Berücksichtigung realer Wetterdaten, die als höhenabhängige Messungen an verschiedenen Orten vorliegen, ist ein Verfahren zur räumlichen Mittelung dieser Messungen notwendig. Dieses Verfahren muss Funktionen $f(x,y,z)$ so liefern, dass die Funktionen überall von einer angemessenen Ordnung C^n sind und die erste Ableitung in z-Richtung $\partial_z f(x,y,z)$ für $z=0$ überall gleich 0 ist.

Dies gelingt mit Hilfe einer Kombination von interpolierenden kubischen Spline-Funktionen, Legendre Transformationen und 2-D interpolierenden Oberflächen-Splines.

Ray-tracing Gleichungen

Die grundlegenden Gleichungen zur Propagation eines Schallstrahls, sind die bei Pierce [1] abgeleiteten Ray-tracing Gleichungen:

$$\left.\frac{dx_{p_i}}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\left[\frac{c^2 s_i}{\Omega} + v_i\right]\right|_{\vec{x}_p(t=t_0)} \tag{1}$$

$$\left.\frac{ds_i}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\left[-\frac{\Omega}{c}\frac{\partial c}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{3} s_j \frac{\partial}{\partial x_i} v_j\right]\right|_{\vec{x}_p(t=t_0)} \tag{2}$$

für $i = 1, 2, 3$ und mit:

$$\vec{s} = \frac{\vec{n}}{c + \vec{v}\cdot\vec{n}} \qquad \Omega = 1 - \vec{v}\cdot\vec{s} \tag{3}$$

wobei:

$\vec{x}$	Ortsvektor eines Punktes im Raum
$\vec{x}_p$	Ortsvektor eines Punktes auf der Wellenfront
$\vec{n}$	Einheitsnormalenvektor der Wellenfront (abh. von $\vec{x}_p$ und t)
c	Schallgeschwindigkeit (abh. von $\vec{x}$ und evtl. t)
$\vec{v}$	Windvektor (abh. von $\vec{x}$ und evtl. t)
$\vec{s}$	Slownessvektor (abh. von $\vec{x}_p$ und t)
x_{p_k}, s_k, v_k, x_k	Karthesische Koordinaten der entsprechenden Vektoren (k = 1, 2, 3)

Dieses Gleichungssystem läßt sich mit Standardverfahren der Numerik integrieren, ist aber schlecht konditioniert. Hier wird das klassische Runge-Kutta-Verfahren (vgl. z.B. [2]) angewandt. Die maximal mögliche Konvergenzordnung $O(\Delta t^5)$ wird erreicht, wenn die Funktionen $c(x,y,z)$ und $\vec{v}(x,y,z)$ von der Differenzierbarkeitsklasse C^5 sind.

Mathematisches Modell einer inhomogenen Atmosphäre

In Anbetracht der Tatsache, dass reale Wetterdaten in der Regel als höhenabhängige Messwerte an verschiedenen Orten vorliegen werden, erscheint es sinnvoll, die Abhängigkeit von z zu separieren. Die z - Abhängigkeit wird durch eine Legendre-Reihe (bis zur Ordnung N) realisiert und die x, y - Abhängigkeit durch ihre Koeffizienten, die von x und y abhängen.

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{N} c_k(x,y)\,\mathrm{P}_k(z) \tag{4}$$

wobei:

$f(x,y,z)$	einer der Wetterparameter (v_x, v_y, v_z, T oder H)
$c_k(x,y)$	von x und y abh. Legendre-Koeffizienten
$\mathrm{P}_k(z)$	Legendre-Polynom der Ordnung k

Berechnung der ortsspezifischen Legendre-Reihen

Wenn an einem Ort (x_i, y_i) höhenabhängige Messwerte (z_j, f_j) vorliegen - wobei f wieder einer der Wetterparameter (v_x, v_y, v_z, T oder H) ist - dann wird zunächst ein interpolierender Spline $Spl_i(z)$ für die Messwerte berechnet (siehe z. B. [2]). Mittels dieses Splines wird eine Legendre-Reihe $\hat{\mathrm{P}}_i^{(N_i)}(z)$ der Ordnung N_i berechnet, die den Spline bis auf eine vorgebbare Abweichung approximiert:

$$\hat{\mathrm{P}}_i^{(N_i)}(z) = \sum_{k=0}^{N_i}\left(\int_{-1}^{1} Spl_i(z)\,\mathrm{P}_k(z)\,dz\right)\mathrm{P}_k(z) = \sum_{k=0}^{N_i} c_{i,k}\,\mathrm{P}_k(z) \tag{5}$$

wobei:

$\hat{P}_i^{(N_i)}(z)$	Legendre-Reihe der Ordnung N_i (für den Ort (x_i, y_i))
$Spl_i(z)$	Spline, der die Messwerte (z_j, f_j) (am Ort (x_i, y_i)) interpoliert
$P_k(z)$	Legendre-Polynom der Ordnung k
$c_{i,k}$	Legendre-Koeffizienten (am Ort (x_i, y_i)) für k-tes Legendre-Polynom

Für jeden Ort (x_i, y_i) liegt somit eine Legendre-Reihe und damit ein Satz von Koeffizienten $c_{i,k}$ vor.

Ein Beispiel für diese Berechnungen zeigt Abbildung 1.

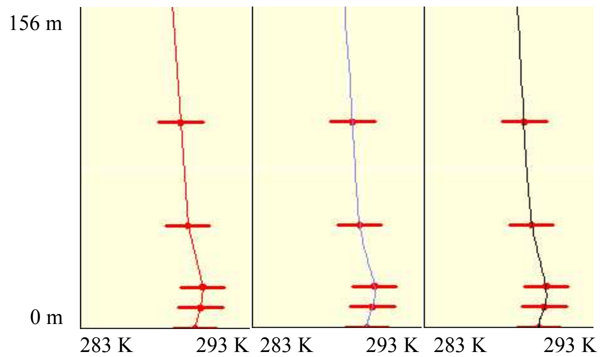

Abbildung 1: Spline-Interpolation (blaue Kurve) von Temperatur-Messwerten (rote Punkte mit Fehlerbalken) und Approximation durch eine Legendre-Reihe (schwarze Kurve).

Die Interpolation zwischen diesen einzelnen Legendre-Koeffizienten an verschiedenen Orten geschieht mit Hilfe von 2D interpolierenden Oberflächen Splines.

Interpolation der ortsspezifischen Legendre-Koeff.

Die gem. Gl. (5) berechneten Legendre-Koeffizienten $c_{i,k}$ sind spezifisch für jeden Ort (x_i, y_i), also: $c_{i,k} = c_k(x_i, y_i)$. Mittels eines zweidimensionalen interpolierenden Oberflächen Splines lässt sich aus diesen diskreten Werten eine auf dem gesamten (x, y)-Gebiet definierte Funktion vorgebbarer Differenzierbarkeitsklasse M gewinnen. Dabei ist es nicht notwendig, dass die Punkte (x_i, y_i) ein reguläres Gitter bilden.

$$c_k(x,y) = \sum_{i=0}^{N_x-1} \varphi_{k,i}\, \mathrm{E}(x-x_i, y-y_i) + p_k^{(M-1)}(x,y) \qquad (6)$$

mit:

$$\mathrm{E}(\chi,\psi) = \left(\chi^2+\psi^2\right)^{M-1} \ln(\chi^2+\psi^2) \qquad (7)$$

$$p_k^{(M-1)}(\chi,\psi) = \sum_{l=0}^{M-1}\left(\sum_{n=0}^{l} \varphi_{k,j+N_x}\chi^{l-n}\psi^n\right) \qquad (8)$$

mit $j = l\,(l+1)/2 + n$ und

M	Interpolations-Ord. bzw. Differenzierbarkeitskl.
N_x	Anzahl der Stützstellen (Orte (x_i, y_i))
(x_i, y_i)	Stützpunkte (Orte der höhenabh. Messwerte)
$\varphi_{k,i}$	Koeffizienten des Oberflächen Splines (konstant)

Die Bestimmung der $\varphi_{k,i}$ erfolgt mittels des Algorithmus von J. Meinguet [4]. Das lineare Gleichungssystem, dass sich dabei ergibt, ist schlecht konditioniert und zwar je höher die Ordnung M desto schlechter.

Die Abbildung 2 zeigt das Ergebnis einer solchen Oberflächenspline-Interpolation.

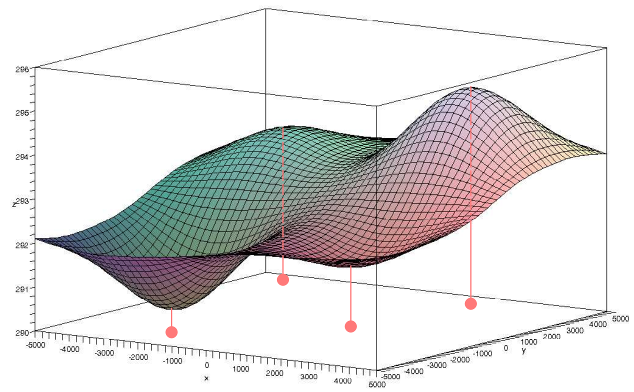

Abbildung 2: 3-D Darstellung der Oberflächenspline-Interpolation für den Koeffizienten $c_0(x, y)$ der Legendre-Reihen-Entwicklung einer Temperaturmessung an 4 Orten.

Literatur

[1] Pierce, A. D., Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications, Acoustical Society of America, Woodbury, New York, 1989, 371 ff.

[2] Engeln-Müllges, G., Uhlig, F., Numerical Algorithms with C, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1996

[3] Zangers, J., Hirsch, K.H., Ray-Tracing in a 3-D Wind Field for Prediction Purposes of Shooting Noise, Part II, DAGA 2004

[4] Meinguet, B. J., Multivariate interpolation at arbitrary points made simple, Z.A.M.P, Vol 30 (1979), p. 292 –304

Diese Untersuchungen wurden vom Bundesministerium der Verteidigung gefördert.